|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| wordml://75.png |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| |  | | --- | | Imię i nazwisko studenta: Ewa Sobieniak  Nr albumu: 126438  Studia drugiego stopnia  Forma studiów: stacjonarne  Kierunek studiów: Fizyka Techniczna  Specjalność/profil: Informatyka stosowana | |  |
|  |  |

**PRACA DYPLOMOWA MAGISTERSKA**

Tytuł pracy w języku polskim: Implementacja wybranego modelu zderzeń w grach dwuwymiarowych

Tytuł pracy w języku angielskim: Implementation of the selected collisions model in two-dimensional games

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| |  | | --- | | Potwierdzenie przyjęcia pracy | | |
| |  | | --- | | Opiekun pracy  *podpis* |   *Podpis* | |  | | --- | | Kierownik Katedry/Zakładu  *podpis* |   *podpis* |
| dr inż. Paweł Syty |  |

Data oddania pracy do dziekanatu:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| wordml://75.png | |  |  |
|  | **OŚWIADCZENIE** | | |
|  | |  | | --- | | Imię i nazwisko studenta: Ewa Sobieniak  Data i miejsce urodzenia: 23.01.1990, Gdańsk  Nr albumu: 126438  Wydział: Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej  Kierunek studiów: Fizyka Techniczna  Poziom studiów: Studia drugiego stopnia  Forma studiów: stacjonarne | | | |
|  | |  | | --- | | Ja, niżej podpisana, wyrażam zgodę na korzystanie z mojej pracy dyplomowej zatytułowanej: Implementacja wybranego modelu zderzeń w grach dwuwymiarowych do celów naukowych lub dydaktycznych.1 | | | |
| |  |  | | --- | --- | | Gdańsk, dnia .................................. | .....................................................  *podpis studenta* | | | | |
|  | |  | | --- | | Świadoma odpowiedzialności karnej z tytułu naruszenia przepisów ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz. U. z 2006 r., nr 90, poz. 631) i konsekwencji dyscyplinarnych określonych w ustawie Prawo o szkolnictwie wyższym (Dz. U. z 2012 r., poz. 572 z późn. zm.),2 a także odpowiedzialności cywilno-prawnej oświadczam, że przedkładana praca dyplomowa została opracowana przeze mnie samodzielnie.  Niniejsza praca dyplomowa nie była wcześniej podstawą żadnej innej urzędowej procedury związanej z nadaniem tytułu zawodowego.  Wszystkie informacje umieszczone w ww. pracy dyplomowej, uzyskane ze źródeł pisanych i elektronicznych, zostały udokumentowane w wykazie literatury odpowiednimi odnośnikami zgodnie z art. 34 ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych.  Potwierdzam zgodność niniejszej wersji pracy dyplomowej z załączoną wersją elektroniczną. | | | |
| |  |  | | --- | --- | | Gdańsk, dnia .................................. | .....................................................  *podpis studenta* | | | | |
|  | Upoważniam Politechnikę Gdańską do umieszczenia ww. pracy dyplomowej w wersji elektronicznej w otwartym, cyfrowym repozytorium instytucjonalnym Politechniki Gdańskiej oraz poddawania jej procesom weryfikacji i ochrony przed przywłaszczaniem jej autorstwa. | | |
| |  |  | | --- | --- | | Gdańsk, dnia ................................. | .....................................................  *podpis studenta* | | | | |
| |  | | --- | |  | | | | |
| |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | 1 | | |  | | --- | | Zarządzenie Rektora Politechniki Gdańskiej nr 34/2009 z 9 listopada 2009 r., załącznik nr 8 do instrukcji archiwalnej PG. | | | |  | | --- | | 2 | | |  | | --- | | Ustawa z dnia 27 lipca 2005 r. Prawo o szkolnictwie wyższym: | | |  | |  | | --- | | Art. 214 ustęp 4. W razie podejrzenia popełnienia przez studenta czynu podlegającego na przypisaniu sobie autorstwa istotnego fragmentu lub innych elementów cudzego utworu rektor niezwłocznie poleca przeprowadzenie postępowania wyjaśniającego. | | |  | |  | | --- | | Art. 214 ustęp 6. Jeżeli w wyniku postępowania wyjaśniającego zebrany materiał potwierdza popełnienie czynu, o którym mowa w ust. 4, rektor wstrzymuje postępowanie o nadanie tytułu zawodowego do czasu wydania orzeczenia przez komisję dyscyplinarną oraz składa zawiadomienie o popełnieniu przestępstwa. | | | | | |

**Spis treści**

[WSTĘP 1](#_Toc393397401)

[1 FIZYKA BADANEGO UKŁADU 3](#_Toc393397402)

[1.1 Kinematyka i dynamika ruchu jednostajnego prostoliniowego 3](#_Toc393397403)

[1.2 Zasada zachowania pędu 3](#_Toc393397404)

[1.3 Zasada zachowania energii 4](#_Toc393397405)

[2 ZDERZENIE IDEALNIE SPRĘŻYSTE 5](#_Toc393397406)

[2.1 Detekcja zderzenia 5](#_Toc393397407)

[2.1.1 Detekcja zderzenia cząstki z obszarem granicznym pudła symulacyjnego 6](#_Toc393397408)

[2.1.2 Detekcja zderzenia dwóch cząstek 7](#_Toc393397409)

[2.2 Odpowiedź zderzenia 7](#_Toc393397410)

[2.2.1 Przypadek ogólny zderzenia typu kula-kula 9](#_Toc393397411)

[2.2.2 Przypadek szczególny zderzenia typu kula-kula - zderzenie dwóch cząstek o tych samych masach i promieniach 12](#_Toc393397412)

[2.2.3 Zderzenie cząstki z obszarem granicznym pudła symulacyjnego 12](#_Toc393397413)

[3 DOKUMENTACJA PROJEKTOWA 14](#_Toc393397414)

[4 TESTOWANIE MODELU 15](#_Toc393397415)

[5 PODSUMOWANIE I WNIOSKI 16](#_Toc393397416)

# WSTĘP

Poniższa praca ma na celu przedstawienie zagadnienia zderzenia idealnie sprężystego. Symulacja badanego układu skupia się na opisie ruchu i zachowań cząstek o kształcie okręgów na płaszczyźnie. Ciężar każdego z obiektów rozłożony jest równomiernie, a więc środek masy znajduje się w środku geometrycznym okręgu o zadanym promieniu. Płaszczyzna, przedstawiona jako pudło symulacyjne, ograniczona jest z czterech stron prostopadłymi ścianami o nieskończenie wielkiej masie.

Głównym założeniem modelu jest zerowa wypadkowa sił zewnętrznych działających na układ (tzw. układ izolowany), a więc trajektoria ruchu cząstki może zmienić się jedynie w skutek zderzenia ze ścianą lub drugą cząstką. Dodatkowo żadna cząstka nie opuszcza układu, ani do niego nie przybywa (tzw. układ zamknięty). Założono również, że powierzchnie kul są idealnie gładkie, a więc pomiędzy obiektami nie występuje tarcie. Ze względu na powyższe fakty, pomiędzy obiektami występują jedynie zderzenia idealnie sprężyste. Z tej samej przyczyny, kinematyka bryły sztywnej została ograniczona do zagadnienia ruchu postępowego.

Praca przedstawia zarówno opis teoretyczny zagadnień niezbędnych do zrozumienia istoty zderzenia sprężystego - zasadę zachowania pędu oraz zasadę zachowania energii - jak i projekt systemu wraz ze sposobem implementacji zastosowanych rozwiązań i algorytmów. Silnik fizyczny został napisany w języku C#, a aplikacja zrealizowana w środowisku Microsoft XNA Game Studio 4.0. Dodatkowo został również przedstawiony sposób wykorzystania zaprojektowanej biblioteki z silnikiem fizycznym w wybranym środowisku graficznym.

Na końcu pracy przedstawiono zestawienie spodziewanych teoretycznych rezultatów zderzeń z wynikami uzyskanymi za pomocą stworzonej aplikacji. Doświadczenie przeprowadzono dla kilku różnych układów symulacyjnych obejmujących wariacje wektorów prędkości, mas, promieni oraz ilości kul uczestniczących w zderzeniach.

Proponowany model może mieć zastosowanie w badaniu dynamiki obiektów kulistych w wielu obszarach zarówno nauki - symulowanie ruchu gazu idealnego - jak i życia codziennego - zderzenia kul bilardowych, przy założeniu braku tarcia pomiędzy powierzchniami - jednak przede wszystkim pozwala zrozumieć sposób działania zderzeń idealnie sprężystych.

# FIZYKA BADANEGO UKŁADU

## Kinematyka i dynamika ruchu jednostajnego prostoliniowego

W celu zaprojektowania silnika fizyki badanego układu należy przede wszystkim zrozumieć jak oraz zgodnie z którymi zasadami fizyki poruszają się jego cząstki. Marta Skorko w swojej "Fizyce" napisała, że "przez ruch ciała rozumiemy zmianę jego położenia w stosunku do innych ciał, które uważamy za nieruchome". Zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki, jeżeli na ciało nie działa żadna siła lub działające na nie siły równoważą się, obiekt pozostaje w spoczynku lub zmiana jego położenia następuje zgodnie z ruchem jednostajnym prostoliniowym. Biorąc pod uwagę powyższe fakty, cząstki w symulowanym układzie będą poruszać się ruchem opisanym przez równania:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

gdzie oznaczają odpowiednio prędkość, położenie w czasie *t* oraz położenie początkowe. Wzory (1.1) i (1.2) odnoszą się do wszystkich składowych wektorów prędkości i położeń obiektów.

## Zasada zachowania pędu

Warto zauważyć, że druga zasada dynamiki mówi o tym, że wszelkie zmiany prędkości mogą zachodzić jedynie pod wpływem działania sił. "Siła [ta] jest proporcjonalna do przyspieszenia, które wywołuje" . Stwierdzenie to można przedstawić za pomocą równania:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

gdzie ***F*** oznacza siłę, *m* masę, ***a*** przyspieszenie. Przedstawiając przyspieszenie z równania (1.3) jako iloraz różnic prędkości i czasu, wzór można przekształcić do postaci:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Popęd siły, będący wektorem o kierunku zgodnym z kierunkiem wektora definiujemy jako iloczyn siły i czasu jej działania. Z kolei iloczyn masy i prędkości nazywamy pędem, który jest wektorem o kierunku zgodnym z wektorem prędkości ***v***. Dlatego też równanie (1.4) oznacza, że "wektor popędu siły jest równy wektorowemu przyrostowi pędu wywołanemu przez tę siłę" .

Chcąc znaleźć chwilową siłę w upływie czasu *Δt* zmierzającym do zera, okazuje się ona być pochodną pędu względem czasu:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Wprowadzając założenia o układzie jako izolowanym i zamkniętym, działająca na niego wypadkowa siła jest zerowa, a więc pochodna pędu po czasie również jest równa zeru czyli:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Cytując opis z "Podstaw fizyki" Resnika, oznacza to, że "jeżeli na układ cząstek nie działają siły zewnętrzne lub ich wypadkowa jest równa zeru, to całkowity pęd układu nie ulega zmianie" [2]. Powyższe stwierdzenie nosi nazwę zasady zachowania pędu. Innymi słowy oznacza to, że całkowity pęd początkowy zamkniętego układu izolowanego jest równy całkowitemu pędowi końcowemu.

## Zasada zachowania energii

W opisanym układzie spełniona jest również zasada zachowania energii. Dotyczy ona wszelkich odmian energii i mówi o tym, że zmiana całkowitej energii układu równa jest energii dostarczonej do układu lub odebranej. Wynika z tego, że w układzie izolowanym zamkniętym, całkowita energia układu pozostaje stała. Oznacza to, że wewnątrz układu mogą zachodzić jedynie przemiany energetyczne jednej energii w drugą - energia nie może być ani tworzona, ani niszczona.

W przypadku badanego układu, w którym zmienia się jedynie energia kinetyczna poszczególnych obiektów, zasadę zachowania energii można przedstawić za pomocą wzoru:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

# ZDERZENIE IDEALNIE SPRĘŻYSTE

Cząstki w układzie poruszają się ruchem opisanym za pomocą wzoru (1.2). Pomiędzy zderzeniami, w trakcie ruchu jednostajnego prostoliniowego spełnione jest również równanie (1.1). Jednak z punktu widzenia symulacji dużo ciekawszym aspektem jest kwestia tego kiedy i jak obiekty będą zderzać się między sobą, bo to w trakcie zderzeń będzie zmieniać się wektor prędkości opisujący ruchkażdej z cząstek uczestniczących w zderzeniu. Dlatego też kluczowym fragmentem projektowania silnika fizyki symulatora jest rozważenie zagadnienia detekcji zderzeń oraz przekazywanej w trakcie zderzenia energii, a więc prędkości cząstek tuż po zderzeniu czyli odpowiedzi zderzenia. Zgodnie z definicją Davida M. Bourg, "detekcja zderzenia jest komputerowym problemem geometrycznym, którego rozwiązanie prowadzi do ustalenia, czy i gdzie nastąpiło zderzenie [...]. Odpowiedź zderzenia to problem fizyczny ruchu dwóch lub więcej obiektów" [3].

Głównym założeniem jest ograniczenie wszelkich zderzeń do zderzenia pomiędzy dwoma obiektami. W przypadku zderzeń wielu obiektów, zostaną one rozpatrzone po kolei jako sekwencja zderzeń dwóch obiektów. W symulacji występują dwa rodzaje zderzeń:

* zderzenie typu kula-kula
* zderzenie typu kula-ściana

Każdy z przypadków należy rozpatrzyć osobno.

## Detekcja zderzenia

Detekcja kolejnego zderzenia polega na określeniu czasu, w którym ono nastąpi. Najprostszym algorytmem jest wyliczanie dla każdego kroku czasowego czy nastąpiło już zderzenie dla każdej pary kula-kula oraz kula-ściana. Rozwiązanie to ma złożoność obliczeniową rzędu (dla cząstek), a do tego wprowadza utrudnienia w postaci dobrania na tyle małego kroku czasowego aby nie pominąć czasu żadnego zderzenia, ale też na tyle dużego żeby być w stanie w każdym kroku wykonać serię obliczeń dla każdego obiektu. Z tego względu zaproponowano inny algorytm, który polega na wykonaniu poniższych kroków:

1. Dla -tej kuli, gdzie , znajdź czas, dla którego nastąpi zderzenie z każdą ze ścian, w kierunku których kula porusza się.
2. Następnie znajdź najmniejszą wartość czasu i zapamiętaj jako .
3. Dla każdej pary kul, jeżeli nastąpi pomiędzy nimi zderzenie, oblicz czas zderzenia.
4. Znajdź najmniejszą wartość czasu i jeżeli jest mniejsza od , ustaw nową wartość zmiennej.

Opis działania dla punktów 1) oraz 3) przedstawiono w kolejnych podrozdziałach.

Zaletą tego algorytmu jest brak potrzeby wykonywania zbędnych obliczeń dla kroków, w których zderzenie nie nastąpi i dokładna znajomość czasu, w którym najbliższe zderzenie będzie miało miejsce (eliminacja problemu pominięcia kolizji).

### Detekcja zderzenia cząstki z obszarem granicznym pudła symulacyjnego

Ponieważ kule znajdują się w prostokątnym pudle o czterech różnych pionowych lub poziomych ścianach, w przypadku zderzenia typu kula-ściana należy określić, która ze ścian będzie uczestniczyć w zderzeniu. W tym celu można wykorzystać informację o kierunku ruchu kuli zawartą w jej wektorze prędkości. Ponieważ symulacja jest wyświetlana na monitorze, układ współrzędnych został przyjęty zgodnie z układem ekranu: jeżeli składowa x-owa prędkości kuli jest dodania, kula porusza się w kierunku prawej ściany. Jeżeli jest mniejsza, w kierunku lewej. Z kolei w przypadku składowej y-owej, dodatnia wartość oznacza ruch w kierunku ściany dolnej, a ujemna w kierunku ściany górnej.

Dysponując powyższą informacją można określić, z którą ze ścian nastąpi kolejne zderzenie. W kolejnym kroku należy wyliczyć czas zderzenia. Przykładowo dla zderzenia ze ścianą dolną, jeżeli kula o promieniu znajduje się w odległości od krawędzi ściany (mierząc od środka kuli), a jej prędkość wynosi:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Cząstka poruszając się ruchem jednostajnym prostoliniowym pokona dystans do dolnej ściany:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

w czasie:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

### Detekcja zderzenia dwóch cząstek

W przypadku dwóch kul o prędkościach , ich zderzenie nastąpi w momencie, gdy odległość pomiędzy środkami kul będzie równa sumie ich promieni. Oznaczając współrzędne środków okręgów jako i oraz korzystając z faktu, że poruszają się ruchem jednostajnym prostoliniowym (zgodnie ze wzorem (1.2)), dystans można określić jako:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Równanie (2.4) można doprowadzić do postaci równania kwadratowego względem niewiadomego czasu :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Rozwiązując równanie (2.5) względem niewiadomej należy rozpatrzyć tylko te przypadki, w których , ponieważ w przeciwnym razie kule nie zderzą się. Z wyliczonych czasów , należy wybrać mniejszy, ale równocześnie większy od 0 (ponieważ szukamy najbliższego, ale kolejnego zderzenia).

## Odpowiedź zderzenia

Znając czas kolejnego zderzenia należy rozpatrzyć jak tuż przed, w jego trakcie oraz tuż po zachowają się obiekty uczestniczące w nim. Czym właściwie jest zderzenie? Potocznie mówiąc są to wszelkiego rodzaje kolizje pomiędzy obiektami. Chcąc podać bardziej precyzyjną definicję można powiedzieć, że "zderzenie zachodzi wtedy, gdy dwa lub więcej ciał (partnerów zderzenia) działa na siebie stosunkowo dużymi siłami w stosunkowo krótkim przedziale czasu" . Zderzenie sprężyste jest tego typu zderzeniem, w którym spełniona jest zasada zachowania energii (pamiętając, że w przypadku badanego układu dodatkowo spełniona jest również zasada zachowania pędu). Gdy zasada nie jest zachowana mamy do czynienia z tak zwanym zderzeniem niesprężystym. W życiu codziennym często spotykamy się ze zderzeniami w przybliżeniu sprężystymi. Przykładem takiego zderzenia jest kolizja dwóch kul bilardowych, w skutek której bardzo mała, praktycznie pomijalna część energii jest przekazywana w postaci fali dźwiękowej towarzyszącej hukowi przy zderzeniu. Przeważnie jednak ilość oddanej energii jest pomijalnie mała i zderzenie można uznać za niemal sprężyste. W rozważaniach pomijane jest również tarcie pomiędzy powierzchniami obiektów uczestniczących w zderzeniu (a więc współczynnik resuscytacji zderzenia jest równy jedności).

Zderzenie można również podzielić ze względu na kierunek ruchu obiektów przed i po kolizji. Zderzenie centralne ma miejsce, gdy wszystkie ciała uczestniczące w zderzeniu poruszają się przed i po zderzeniu wzdłuż tej samej prostej - krótko mówiąc, jest to przypadek jednowymiarowy. Oznacza to, że wektory prędkości obiektów przed i po zderzeniu układają się wzdłuż jednej prostej. Z kolei zderzenie niecentralne ma miejsce wtedy, gdy obiekty po zderzeniu poruszają się w innych kierunkach niż przed - a więc przypadek na płaszczyźnie.

Aby zrozumieć istotę zderzenia sprężystego w dwóch wymiarach najpierw należy przeprowadzić analizę dla analogicznej kolizji w jednym wymiarze, które sprowadza się do przypadku zderzenia centralnego. Dwie kule o masach , i prędkościach , poruszają się wzdłuż tej samej prostej (ze względu na rozważania w jednym wymiarze, prędkość nie jest już wektorem, a skalarem). Gdy dochodzi do kolizji, prędkości po zderzeniu , możemy wyliczyć korzystając z zasady zachowania pędu:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Może zmienić się energia kinetyczna poszczególnych obiektów, ale sumaryczna wartość układu musi być zachowana zgodnie z zasadą zachowania energii:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Aby uzyskać wartości prędkości tuż po zderzeniu, należy rozwiązać układ równań (2.6)-(2.7) względem i . Podstawiając za i kolejno:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

....................... TO DO ............................

Ostatecznie otrzymamy dwie prędkości , po zderzeniu:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

### Przypadek ogólny zderzenia typu kula-kula

W przypadku ruchu kul na płaszczyźnie, ruch musi być opisany przy pomocy wektorów przestrzeni . Mając dane wektory prędkości przed zderzeniem określone zgodnie ze wzorem (2.1) jako:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

wektory po zderzeniu określamy analogicznie:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

mając na uwadze ich zależność od wektorów przed zderzeniem.

Celem jest obliczenie wektorów po zderzeniu. Jednym ze sposobów rozwiązania tego problemu jest wzięcie pod uwagę punktu styku kul w momencie zderzenia oraz rozłożeniu wektorów prędkości w kierunku:

* normalnym
* stycznym

do powierzchni stykających się kul. Oznaczając współrzędne środków okręgów jako i , wektor normalny jednostkowy do okręgu pierwszego w punkcie styczności będzie miał postać:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

natomiast wektor styczny:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Zakładając, że powierzchnie obu kul są idealnie gładkie (a więc nie występuje pomiędzy nimi tarcie) możemy wyjść z założenia, że po zderzeniu zmianie ulegną jedynie składowe prędkości normalne. Możemy więc potraktować zachowanie składowych normalnych jak w przypadku zderzenia jednowymiarowego. Składowe styczne pozostaną bez zmian.

Obliczenia należy rozpocząć od wykonania rzutów wektorów prędkości , na osie lokalnego układu współrzędnych wyznaczonego przez wektor normalny i styczny , :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

gdzie oznacza iloczyn skalarny, a więc:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Zgodnie z założeniami, składowe styczne przed i po zderzeniu pozostaną bez zmian:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Natomiast składowe normalne zmienią się zgodnie ze wzorami (2.10)-(2.11) dla przypadku jednowymiarowego w kierunku wyznaczonym przez wektor normalny:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Aby uzyskać wartości wektorów prędkości po zderzeniu w pierwotnym układzie współrzędnych, prędkości należy przetransformować:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Analizując otrzymane wartości wektorów prędkości po zderzeniu wyraźnie widać, że spełniają one zasadę zachowania energii (kinetycznej). Dodatkowo w przypadku uproszczonym, gdy zderzają się obiekty o równych masach - pierwszy ruchomy, drugi stacjonarny - zasada zachowania energii sprowadza się do równania:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Wizualnym potwierdzeniem poprawności powyższego wyprowadzenia jest fakt, że dla opisanego przypadku przedstawionego na rysunku Rys2.1, tworząc trójkąt prostokątny z prędkością początkową jako przeciwprostokątną i prędkościami po zderzeniu jako przyprostokątnymi, okazuje się że do tego samego równania doprowadza twierdzenie Pitagorasa. Trójkąt prostokątny został przedstawiony na rysunku Rys2.2.

|  |
| --- |
|  |
| Rys2.1 Rozkład prędkości kul o tych samych masach przed i po zderzeniu. Grafika zapożyczona z artykułu z Wikipedii [4]. |

|  |
| --- |
|  |
| Rys2.2 Suma kwadratów prędkości przed zderzeniem i po zderzeniu spełniona jest zarówno przez zasadę zachowania energii jak i twierdzenie Pitagorasa. Grafika zapożyczona z artykułu z Wikipedii [4]. |

### Przypadek szczególny zderzenia typu kula-kula - zderzenie dwóch cząstek o tych samych masach i promieniach

W przypadku zderzeń jednakowych kul, wzory (2.10)-(2.11) uproszczą się ze względu tą samą wartość masy :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

a więc poszczególne składowe (2.19)-(2.22) w równaniach (2.23)-(2.24) będą wynosić odpowiednio:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

### Zderzenie cząstki z obszarem granicznym pudła symulacyjnego

Z kolei w przypadku zderzenia kuli ze ścianą, korzystając ze wzorów (2.10)-(2.11) i biorąc pod uwagę, że dla cząstki o małej masie i prędkości przed zderzeniem oraz ścianie o bardzo dużej masie pozostającej w spoczynku ():

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Oznacza to, że po zderzeniu kuli ze ścianą, ściana pozostanie nadal nieruchoma (co jest raczej intuicyjne), a cząstka będzie poruszać się z wektorem prędkości o składowych:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Co dla przykładowego odbicia od ściany poziomej, leżącej na dolnej krawędzi obszaru będzie oznaczało jedynie zmianę składowej y-owej na przeciwną.

# DOKUMENTACJA PROJEKTOWA

# TESTOWANIE MODELU

# PODSUMOWANIE I WNIOSKI