Implementacja wybranego modelu zderzeń w grach dwuwymiarowych

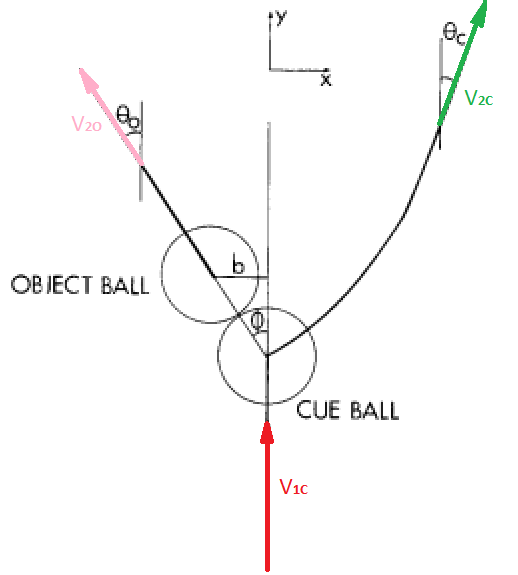
1. Założenia
   1. zderzenia idealnie sprężyste (zaniedbanie tarcia pomiędzy powierzchniami kul)
   2. zderzenie dwóch kul: białej i kolorowej
   3. kule mają taką samą masę
   4. kula kolorowa przed zderzeniem jest nieruchoma
   5. powierzchnia stołu jest idealnie płaska
   6. uwzględnienie zarówno ruchu obrotowego jak i postępowego
   7. zawężenie zagadnienia wirowania kul ze względu na rozmiar zagadnienia do
      1. rotacji postępowej/wstecznej lub braku rotacji kuli białej przed zderzeniem
   8. uwzględnienie w ruchu kuli białej po zderzeniu etapu poślizgu (z rotacją) oraz czystej rotacji bez poślizgu
      1. w zależności od etapu, występowanie tarcia poślizgu (bardzo mała wartość)
      2. występowanie tarcia rotacji (zdecydowanie większa wartość)
   9. symulacja rozpoczyna się od momentu zderzenia białej kuli z kolorową
   10. symulacja kończy się w momencie zatrzymania obu kul lub dla zadanego czasu
2. Cele
   1. pokazanie, że uwzględniając tarcie kuli z podłożem, poniższe podręcznikowe zasady nie są do końca spełnione (ponieważ musi zostać spełniona również zasada zachowania momentu dla ruchu obrotowego):
      1. zasada 90° - po zderzeniu kolorowa kula będzie poruszać się w kierunku wyznaczonym przez linię zderzenia (łączącą środki obu kul tuż przed zderzeniem) natomiast biała bila będzie poruszała się w kierunku prostopadłym do tej linii
   2. porównanie przykładowych wyników dla dwóch modeli - uproszczonego i uwzględniającego tarcie kul z podłożem (rotacja postępowa lub wsteczna kuli)
   3. (?) sprawdzenie czy dla modelu uwzględniającego tarcie z podłożem dla zerowej rotacji kuli białej przed zderzeniem, model da wyniki takie jak dla modelu nie uwzględniającego tarcia (spełnienie zasad z punktu a)
3. Zagadnienia do opracowania (dla obu modeli)
   1. model nie uwzględniający tarcia z podłożem (kule bez bez rotacji) [teoria]
      1. kula biała (bez rotacji przed i po zderzeniu)
         1. wyznaczenie prędkości liniowej tuż po zderzeniu
         2. wyznaczenie trajektorii ruchu kuli po zderzeniu
         3. wyznaczenie chwilowych prędkości kuli po zderzeniu do momentu końca symulacji
      2. kula kolorowa (bez rotacji przed i po zderzeniu)
         1. wyznaczenie prędkości liniowej tuż po zderzeniu
         2. wyznaczenie trajektorii ruchu kul po zderzeniu
         3. wyznaczenie chwilowych prędkości kuli po zderzeniu do momentu końca symulacji
   2. model uwzględniający tarcie kuli z podłożem (ruch obrotowy kuli białej - postępowy lub wsteczny) [teoria + implementacja]
      1. kula biała (z rotacją przed i po zderzeniu)
         1. wyznaczenie prędkości liniowej i kątowej tuż po zderzeniu
         2. wyznaczenie momentu, w którym poślizg ustanie - rotacja bez poślizgu (spełnienie warunku, dla którego )
         3. wyznaczenie trajektorii ruchu kuli po zderzeniu
            1. dla poślizgu
            2. dla rotacji bez poślizgu
         4. wyznaczenie chwilowych prędkości liniowych kuli po zderzeniu do momentu końca symulacji
            1. dla poślizgu
            2. dla rotacji bez poślizgu
         5. wyznaczenie chwilowych prędkości kątowych kuli po zderzeniu do momentu końca symulacji
            1. dla poślizgu
            2. dla rotacji bez poślizgu
      2. kula kolorowa (bez rotacji przed i po zderzeniu)
         1. wyznaczenie prędkości liniowej tuż po zderzeniu
         2. wyznaczenie trajektorii ruchu kuli po zderzeniu
         3. wyznaczenie chwilowych prędkości liniowych kuli po zderzeniu do momentu końca symulacji
4. Literatura (główne pozycje)
   1. Analysis of billard ball collisions in two dimensions, R. Evan Wallace and Michael C. Schroeder, 5 Nov 1987, <http://www.ifi.unicamp.br/~coluci/f129i/wallace.pdf>
   2. The amazing world of billards physics, D. Alciatore, May 2007, <http://billiards.colostate.edu/physics/Alciatore_SCIAM_article_posted_version.pdf>, <http://billiards.colostate.edu/technical_proofs/new/TP_A-4.pdf>
   3. <http://www.real-world-physics-problems.com/physics-of-billiards.html>

Pytanie (?): czy muszę zaimplementować oba modele (nieuwzględniający tarcia kuli z podłożem i uwzględniający) czy też wystarczy pokazać, że dla drugiego z nich (uwzględniającego tarcie), w przypadku, gdy kula biała w momencie zderzenia nie miała prędkości kątowej, model zachowa się jak pierwszy z nich (tj. uzyskam wyniki spełniające zasady 2.a)? Oczywiście w części teoretycznej opisane będą oba modele.

**Ogólny wstęp teoretyczny - krótkie przestawienie obu modeli, dowód, że w przypadku uwzględnienia tarcia kuli z podłożem, zasada 90° nie jest zawsze spełniona.**

3.a Model nie uwzględniający tarcia z podłożem (zaniedbanie rotacji) [teoria]

Przypadek zderzenia idealnie sprężystego białej kuli (ang. cue ball) z identyczną kolorową bilą (ang. object ball) przedstawia rysunek 3.a.1. Kolorowa bila początkowo znajduje się w spoczynku natomiast biała kula toczy się bez poślizgu z prędkością . Środki kul znajdują się w odległości (parametr zderzenia), zmierzonej prostopadle do wektora prędkości. W momencie zderzenia, środki kul są zorientowane pod kątem , gdzie D jest średnicą kul.



Rysunek 3.a.1 Biała kula i kolorowa kula w momencie zderzenia, z zaznaczonymi wartościami Pogrubione linie reprezentują trajektorię kul ( i inicjalnie nie są założone jako równe, dowód równości znajduje się poniżej). (<http://www.ifi.unicamp.br/~coluci/f129i/wallace.pdf>)

Dla zderzenia idealnie sprężystego zachowane są zasady zachowania energii oraz pędu. Dla zderzenia dwóch kul, wektorowy zapis równania zachowania prędkości liniowej można zapisać jako

(1)

a ponieważ masy obu kul są sobie równe, po uproszczeniu mamy

(2)

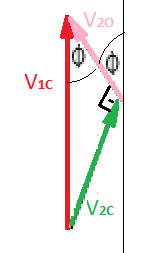
Dla zderzeń sprężystych, zachowana jest również zasada zachowania energii

(3)

co po uproszczeniu daje

(4)

Równanie (4) zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa daje nam informację, że wektory są kolejnymi ramionami trójkąta prostokątnego, co przedstawia rysunek 3.a.2.



Rysunek 3.a.2 Wektory prędkości końcowej kuli kolorowej , kuli białej oraz prędkości początkowej kuli białej tworzą trójkąt prostokątny. (<http://www.real-world-physics-problems.com/physics-of-billiards.html>)

Wynika z tego, że po zderzeniu kula biała porusza się w kierunku prostopadłym do kierunku kuli kolorowej - stąd określenie zasady 90°.

W przypadku, gdy jest to zderzenie czołowe , powyższe rozwiązanie nie jest prawdziwe. W takiej sytuacji , a . Krótko mówiąc oznacza to całkowity transfer prędkości białej kuli do kuli kolorowej.

Tarcie pomiędzy kulami jest zaniedbywalne, a więc w skutek zderzenia powstaną jedynie siły wzdłuż linii łączącej środki kul. Biorąc pod uwagę powyższy fakt oraz zasadę zachowania pędu i energii możemy uzyskać poszczególne składowe prędkości kul po zderzeniu

(5)

(6)

(7)

(8)

Końcowe kierunki ruchu dla obu kul można określić jako

(9)

(10)

a po podstawieniu do równań 9-10 odpowiednich wartości z równań 5-8 otrzymamy

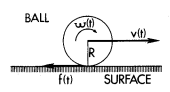
(11)

(12)

Równanie 11 i 12 demonstruje zasadę 90°:

3.b Model uwzględniający tarcie kuli z podłożem (ruch obrotowy kuli białej - postępowy lub wsteczny) [teoria]

W przypadku kuli równocześnie ślizgającej się i obracającej się, pojawi się siła tarcia zorientowana w kierunku przeciwnym do prędkości powierzchni kuli w punkcie styku kuli z płótnem stołu (zakładając ruch jak na rysunku 3.b.1).



Rysunek 3.b.1 Rotacja z poślizgiem powoduje powstanie siły tarcia .

Wypisując równania ruchu mamy

(13)

(14)

gdzie to odpowiednio masa, moment bezwładności oraz promień kuli. Różniczkując te równania otrzymujemy

(15)

(16)

Aby pozbyć się nieznanej całki, dodajemy równania całkami i po przekształceniach otrzymujemy

(17)

W momencie zaprzestania poślizgu , gdy kula będzie poruszać się z rotacją bez poślizgu, spełniony będzie warunek

(18)

Podstawiając równanie 6 i zastępując możemy rozwiązać równanie 5 jako

(19)

Równanie to stosuje się zarówno do ruchu w kierunku osi jak i , ponieważ jest całkowicie niezależne od postaci funkcji siły tarcia .

Po podstawieniu do równania 19 wartości z równań 5-8, możemy otrzymać końcowe wartości prędkości dla kolorowej kuli (dla czasu )

(20)

(21)

Z uzyskanych prędkości otrzymujemy ten sam kąt, jak dla przypadku nie uwzględniającego tarcia podłoża czyli

(22)

Wynika z tego jasno, że tarcie podłoża wpływa na prędkość kolorowej kuli, ale nie na kierunek.

W przypadku kuli białej wpływ siły tarcia jest bardziej drastyczny. Analogicznie uzyskujemy poszczególne składowe końcowej prędkości

(23)

Końcowa prędkość w kierunku osi jest powiększona w stosunku do przypadku bez tarcia, ze względu na początkową rotację kuli wokół osi . Ponieważ biała kula przed zderzeniem toczyła się bez poślizgu, stosując równość otrzymujemy drugą składową

(24)

Co skutkuje kątem po zderzeniu

(25)

który okazuje się być kątem zupełnie innym niż uzyskany w przypadku braku tarcia podłoża. Wyraźnie widać, że dla tego przypadku zasada 90° nie jest spełniona.

W kolejnej części przyjrzymy się bliżej modelowi uwzględniającemu tarcie podłoża, w szczególności dla przypadku, gdy biała kula przed zderzeniem miała nadaną rotację postępową lub wsteczną.

### Two- and three-dimensional[[edit](http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Elastic_collision&action=edit&section=5)]

For the case of two colliding bodies in two dimensions, the overall velocity of each body must be split into two perpendicular velocities: one tangent to the common normal surfaces of the colliding bodies at the point of contact, the other along the line of collision. Since the collision only imparts force along the line of collision, the velocities that are tangent to the point of collision do not change. The velocities along the line of collision can then be used in the same equations as a one-dimensional collision. The final velocities can then be calculated from the two new component velocities and will depend on the point of collision. Studies of two-dimensional collisions are conducted for many bodies in the framework of a [two-dimensional gas](http://en.wikipedia.org/wiki/Two-dimensional_gas).

[](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Elastischer_sto%C3%9F_2D.gif)

Two-dimensional elastic collision

In a [center of momentum frame](http://en.wikipedia.org/wiki/Center_of_momentum_frame) at any time the velocities of the two bodies are in opposite directions, with magnitudes inversely proportional to the masses. In an elastic collision these magnitudes do not change. The directions may change depending on the shapes of the bodies and the point of impact. For example, in the case of spheres the angle depends on the distance between the (parallel) paths of the centers of the two bodies. Any non-zero change of direction is possible: if this distance is zero the velocities are reversed in the collision; if it is close to the sum of the radii of the spheres the two bodies are only slightly deflected.

Assuming that the second particle is at rest before the collision, the angles of deflection of the two particles, \vartheta_1 and \vartheta_2, are related to the angle of deflection \theta in the system of the center of mass by[[1]](http://en.wikipedia.org/wiki/Elastic_collision#cite_note-1)

\tan \vartheta_1=\frac{m_2 \sin \theta}{m_1+m_2 \cos \theta},\qquad
\vartheta_2=\frac{{\pi}-{\theta}}{2}.

The velocities of the particles after the collision are:

\mathbf{v'_1}=\mathbf{v_1}\frac{\sqrt{m_1^2+m_2^2+2m_1m_2\cos \theta}}{m_1+m_2},\qquad
\mathbf{v'_2}=\mathbf{v_1}\frac{2m_1}{m_1+m_2}\sin \frac{\theta}{2}.

### Two-Dimensional Collision With Two Moving Objects[[edit](http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Elastic_collision&action=edit&section=6)]

The final x and y velocities of the first ball can be calculated as:[[2]](http://en.wikipedia.org/wiki/Elastic_collision#cite_note-2)

\begin{align}
v'_{1x}&=\frac{v_{1}\cos(\theta_1-\varphi)(m_1-m_2)+2m_2v_{2}\cos(\theta_2-\varphi)}{m_1+m_2}\cos(\varphi)
\\[0.2em]
&\quad+v_{1}\sin(\theta_1-\varphi)\cos(\varphi+\frac{\pi}{2})
\\[0.8em]
v'_{1y}&=\frac{v_{1}\cos(\theta_1-\varphi)(m_1-m_2)+2m_2v_{2}\cos(\theta_2-\varphi)}{m_1+m_2}\sin(\varphi)
\\[0.2em]
&\quad+v_{1}\sin(\theta_1-\varphi)\sin(\varphi+\frac{\pi}{2})
\end{align}

where *v*1 and *v*2 are the scalar sizes of the two original speeds of the objects, *m*1 and *m*2 are their masses, *θ*1 and *θ*2 are their movement angles, that is, v_{1x}=v_1\cos\theta_1,\;v_{1y}=v_1\sin\theta_1 (meaning moving directly down to the right is either a -45° angle, or a 315°angle), and lowercase phi (φ) is the contact angle. (To get the x and y velocities of the second ball, one needs to swap all the '1' subscripts with '2' subscripts.)

This equation is derived from the fact that the interaction between the two bodies is easily calculated along the contact angle, meaning the velocities of the objects can be calculated in one dimension by rotating the x and y axis to be parallel with the contact angle of the objects, and then rotated back to the original orientation to get the true x and y components of the velocities.

In an angle-free representation, the changed velocities are computed using the centers **x**1 and **x**2 at the time of contact as

\begin{align}
\mathbf{v}'_1&=\mathbf{v}_1-\frac{2\cdot m_2}{m_1+m_2}\cdot \frac{\langle \mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2,\,\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\rangle}{\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|^2}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2),
\\
\mathbf{v}'_2&=\mathbf{v}_2-\frac{2\cdot m_1}{m_1+m_2}\cdot \frac{\langle \mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1,\,\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\rangle}{\|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\|^2}\cdot(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)
\end{align}

**Prędkości początkowe tuż po zderzeniu:**

W przypadku zderzeń idealnie sprężystych dla dwóch kul, zachowany jest pęd:

(1)

Ponieważ dla identycznych kul , po przekształceniu równania 1 otrzymujemy

(2)

Możemy również skorzystać z zasady zachowania energii. Oznacza to, że:

(2)

gdzie indeksy 1,2 oznaczają poszczególne z kul, a prędkości primowane są prędkościami po zderzeniu.

(3)

Korzystając z równania (2) dla odpowiednich wartości i możemy rozwiązać równanie (3). Dla postawienia

(4)

oraz analogicznie dla postawienia

(5)

Równania 4 i 5 dla zderzeń idealnie sprężystych mają jedynie dwa możliwe rozwiązania:

(6)

(7)

Uwzględniając warunki początkowe - kula kolorowa stacjonarna - równanie 7 opisuje przypadek szczególny zderzenia idealnie sprężystego centralnego, w którym kula biała zatrzymuje się po zderzeniu, przekazując swoją prędkość kuli kolorowej.

Równanie 6, modyfikując o indeksy oraz odpowiednio dla kuli kolorowej i białej oraz 1 i 2 jako przed i po zderzeniu, przedstawione zostanie jako

(8)

**Prędkości początkowe tuż po zderzeniu:**

W przypadku zderzeń idealnie sprężystych dla dwóch kul, zachowany jest pęd:

(1)

Ponieważ dla identycznych kul , po przekształceniu równania 1 otrzymujemy

(2)

Możemy również skorzystać z zasady zachowania energii. Oznacza to, że:

(2)

gdzie indeksy 1,2 oznaczają poszczególne z kul, a prędkości primowane są prędkościami po zderzeniu.

(3)

Korzystając z równania (2) dla odpowiednich wartości i możemy rozwiązać równanie (3). Dla postawienia

(4)

oraz analogicznie dla postawienia

(5)

Przy początkowym założeniu oraz , równania 4 i 5 dla zderzeń idealnie sprężystych, mają jedynie kila możliwych rozwiązań

(6)

(7)

(8)

(9)

Równania 7 i 8 opisują szczególny przypadek zderzenia idealnie sprężystego centralnego, w efekcie którego biała kula zatrzymuje się, przekazując całą prędkość sprzed zderzenia kuli kolorowej.

Równania 6 i 8 oznaczają sytuacje, w których kolejno kula kolorowa i biała po zderzeniu zatrzymuje się.

Uwzględniając warunki początkowe - kula kolorowa stacjonarna - równanie 7 opisuje przypadek szczególny zderzenia idealnie sprężystego centralnego, w którym kula biała zatrzymuje się po zderzeniu, przekazując swoją prędkość kuli kolorowej.

Równanie 6, modyfikując o indeksy oraz odpowiednio dla kuli kolorowej i białej oraz 1 i 2 jako przed i po zderzeniu, przedstawione zostanie jako

(8)